TD 11 : Équations différentielles Indications

Équations différentielles d'ordre 1

1 ★★☆ (*ED linéaires d'ordre 1*) Résoudre les équations suivantes :

1) $y' + y = e^x$
2) $y' - y = 1 + e^x$
3) $y' - 2y = e^x \cos(2x)$
4) $(1+e^x)y' + e^x y = 0$
5) $\operatorname{ch} x\, y' - \operatorname{sh} x\, y = \operatorname{sh}^3 x$
6) $(1+x^2)y' + 2xy = -1$

2 ★★ (*Problèmes de Cauchy d'ordre 1*) Résoudre les équations suivantes :

1) $\begin{cases} y' + y = \dfrac{1}{1+e^x} \\ y(\ln 2) = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y' - 2xy = -(2x-1)e^x \\ y(1) = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y' + \arctan(\sqrt{1+e^x})y = 0 \\ y(\pi e^{-1}) = 0 \end{cases}$

3 ★★ (*ED linéaires d'ordre 1, bis*) Résoudre les équations suivantes sur un intervalle I convenable (s'il y en a plusieurs, choisissez-en un) :

1) $xy' - 2y = 4\ln x$
2) $\sqrt{1-x^2}\, y' + y = 1$

3) $\begin{cases} y' - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} y = e^{\arccos x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y' - \tan(x) y = 1 \\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$

4 ★★☆ (*ED avec raccord*) On considère l'équation $(E) : xy' + y = 0$.

1) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}_-^*$.
2) Si y est une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$, que serait la valeur de $y(0)$?
3) Peut-on trouver une solution de (E) sur $\mathbb{R}$?

5 ★★☆ Soit a, b deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On considère l'ED

$$(E) : \quad y' + a(t)y + b(t)y^2 = 0$$

On admettra que, si y est une solution qui n'est pas identiquement nulle, alors y ne s'annule jamais.

1) Soit y une solution de (E) non identiquement nulle. En posant $z = \dfrac{1}{y}$, se ramener à une équation linéaire en la fonction z.
2) Résoudre l'équation (E).

1) Faire une réécriture de l'équation pour faire apparaitre z'.

6 ★★★ Trouver les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient l'équation $y' + y = \int_0^1 y(t)dt$. On pourra raisonner par analyse-synthèse.

Dériver l'équation $y' + y = \int_0^1 y(t)dt$.

Équations différentielles d'ordre 2

7 ★★☆ (*ED linéaires d'ordre 2*) Résoudre les équations suivantes :

1) $4y'' + 8y' + 5y = 2e^x$
2) $y'' - 5y' + 4y = e^x$
3) $y'' - 4y' + 4y = 4e^{2x}$
4) $y'' + 4y = 3\cos^2 x$
5) $y'' + iy' = x + 3$
6) $y'' + 3y' - 4y = ix^2$

8 ★★ (*Problème de Cauchy d'ordre 2*) Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1) $\begin{cases} y'' + 4y = \cos(3x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y'' + 2y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

9 ★★☆ (*ED déphasée*) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On souhaite déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = f(\lambda - x)$$

1) Montrer que si f vérifie cette condition, alors f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) En déduire l'ensemble des fonctions f vérifiant cette condition.

1) f' s'écrit comme une composée de deux fonctions...
2) Dériver la relation $f'(x) = f(\lambda - x)$

10 ★★☆

1) Montrer que l'équation $y'' + 2y' + 2y = 0$ possède une et une seule solution bornée sur $\mathbb{R}$.
2) Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déduire de la question précédente que l'équation $y'' + 2y' + 2y = f(x)$ possède au plus une solution bornée sur $\mathbb{R}$.

1) Résoudre.
2) C'est une équation différentielle linéaire. Utiliser la structure de l'ensemble des solutions.

11 ★★★ Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) + f(-x) = e^x$$

Indication : en justifiant, on pourra dériver l'égalité ci-dessus et montrer que f vérifie une équation différentielle.